한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-2번

1. 원점 $(0,0)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ $(0 \le x \le 1)$라 하자.

함수 $g(x)$의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$이다.

$g(0)=1$, $g(1)=1$이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$이다. $0<x<1$일 때

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}} \Leftrightarrow x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}} \ (n \ge 3\text{이므로})$$

$$\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $g(x)$가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 원하는 점 A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$이다.

2. $0<x<1$일 때 $f'(x)=-(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}x^{n-1}<0$이다.

곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(x_0,f(x_0))$의 접선의 방정식은 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

점 P의 좌표를 $(p,0)$, 점 Q의 좌표를 $(0,q)$이라 하면 $0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0)$, $q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

따라서 $p=\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)}$, $q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)},0\right)$, 점 Q의 좌표는 $(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$이다.

이로부터 선분 PQ의 길이의 제곱을 $h(x_0)$라 하면

$h(x_0)=\dfrac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}\left(1+(f'(x_0))^2\right)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편 $|f(x_0)-x_0f'(x_0)|=\left|(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}+x_0^n(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}\right|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}$, $|f'(x_0)|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}x_0^{n-1}$이므로 정리하면

$h(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+(1-x_0^n)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,1)$에서의 $h(x)$의 최솟값을 찾으면 충분하다.

x가 0또는 1로 수렴함에 따라 $h(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

또한 $h'(x)=2(1-n)(x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1})$이므로, $0<x<1$일 때

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0 \ (n \ge 3\text{이므로}) \Leftrightarrow x^{2-3n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}<0 \Leftrightarrow x^{2-3n}<(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}$$

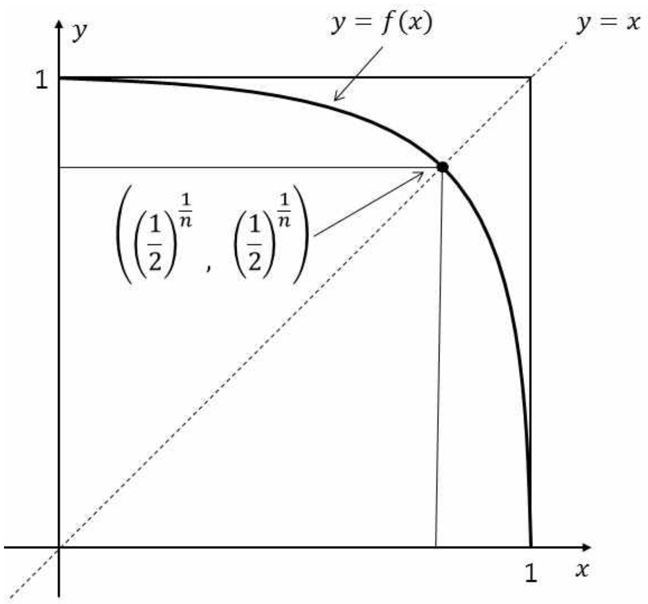
$$\Leftrightarrow x>(1-x^n)^{\frac{1}{n}} \ (n \ge 3\text{이므로}) \Leftrightarrow x^n>1-x^n \Leftrightarrow x^n>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $h(x)$가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$이다.

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$ 이다.

3.



$0<x<1$일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$이다. 이로부터

(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$인 정사각형의 넓이) $=\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx$

$\le \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} f(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx \le \int_0^1 1dx$

= (한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

를 얻는다. 정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \le d_n \le 1$

이 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}=1$이므로 제시문 <다>에 의해 $\lim_{n\to\infty}d_n=1$